想拿中考压轴分 吃透二次函数

二次函数是每年中考必考的压轴题。近两年来，命题趋势逐渐向代数推理倾斜，更加注重对函数表达式变形、参数范围分析、常数存在性探究等代数运算能力的考查，这类题型更能体现数学的逻辑严谨性和抽象思维能力。

名师档案

高中福

济宁市第十五中学数学教师，中学高级教师，曾获“济宁市教学能手”“任城区教学工作先进个人”等荣誉称号，获评“济宁市优质课执教者”“济宁市基本功比赛一等奖”等奖项。参与《基于观察与诊断下的构建高效课堂策略的研究》等省级课题三项，均圆满结题。

【典例精讲】(2025年山东中考题)

已知二次函数$y=x(x-a)+(x-a)(x-b)+x(x-b)$，其中a，b为两个不相等的实数。

(1)当$a=0$，$b=3$时，求此函数图象的对称轴；

(2)当$b=2a$时，若该函数在$0\leqslant x\leqslant 1$时，y随x的增大而减小；当$3\leqslant x\leqslant 4$时，y随x的增大而增大，求a的取值范围；

(3)若点$A(a,y_1)$，$B(\frac{a+b}{2},y_2)$，$C(b,y_3)$均在该函数的图象上，是否存在常数m，使得$y_1+my_2+y_3=0$？若存在，求出m的值；若不存在，说明理由。

该题通过“对称轴求解——增减性求参数范围——定点与常数存在性”的梯度设问，完整呈现了中考二次函数压轴题的考查逻辑。第一问“当a＝0，b＝3时，求此函数图象的对称轴”，属于基础概念应用题，核心考查二次函数对称轴的求解方法；第二问“当b＝2a时，根据函数在特定区间的增减性求a的取值范围”，需要结合函数性质进行逻辑推理，属于中档难度的综合题；第三问“判断是否存在常数m使得$y_1+my_2+y_3=0$”，则是对代数运算和逻辑探究能力的深度考查，属于压轴题中的难点。这三个问题由浅入深、层层递进，既覆盖了二次函数的核心知识点，又实现了对不同能力层次学生的区分，完美契合中考“重基础、强应用、考能力”的命题理念。

解题步骤如下：

(1)当$a=0$，$b=3$时，二次函数$y=x(x-a)+(x-a)(x-b)+x(x-b)$可化为：$y=x(x-0)+(x-0)(x-3)+x(x-3)=3x^2-6x$

∴此函数图象的对称轴为直线

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 3}=1$

(2)当$b=2a$时，二次函数$y=x(x-a)+(x-a)(x-b)+x(x-b)$可化为：$y=x(x-a)+(x-a)(x-2a)+x(x-2a)=3x^2-6ax+2a^2$

∴抛物线对称轴为直线

$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6a}{2\times 3}=a$

∵$3>0$

∴抛物线开口方向向上

∵当$0\leqslant x\leqslant 1$时，y随x的增大而减小

∴$a\geqslant 1$

∵当$3\leqslant x\leqslant 4$时，y随x的增大而增大

∴$a\leqslant 3$

∴$1\leqslant a\leqslant 3$

(3)存在.

∵点$A(a,y_1)$，$B(\frac{a+b}{2},y_2)$，$C(b,y_3)$均在该函数的图象上

∴$y_1=a(a-a)+(a-a)(a-b)+a(a-b)=a^2-ab$

$y=x(x-a)+(x-a)(x-b)+x(x-b)=3x^2-2(a+b)x+ab$

∴$y_2=3(\frac{a+b}{2})^2-2(a+b)(\frac{a+b}{2})+ab$

$=3\times\frac{(a+b)^2}{4}-(a+b)^2+ab$

$=-\frac{(a+b)^2}{4}+ab$

$=-\frac{1}{4}(a^2-2ab+b^2)$

$=-\frac{1}{4}(a-b)^2$

$y_3=b(b-a)+(b-a)(b-b)+b(b-b)$

$=b^2-ab$

∵$y_1+my_2+y_3=0$

∴$a^2-ab+m[-\frac{1}{4}(a-b)^2]+b^2-ab=0$

整理得：$(a-b)^2(1-\frac{1}{4}m)=0$

∵a，b为两个不相等的实数

∴$a-b\neq 0$

∴$1-\frac{1}{4}m=0$，解得：$m=4$

解题技巧：

解决二次函数压轴题的核心思路可概括为“化简解析式→用函数性质→代点计算(消参求解)”，这一思路贯穿于所有题型的解答过程，是应对这类问题的“万能钥匙”。

除了上述核心解题思路，还要掌握以下三大解题技巧。

1. **代数变形是基础：**主要包括整式展开、因式分解、完全平方公式的运用。这些代数运算技巧是连接函数表达式与图象性质的纽带。

2. **数形结合是核心：**通过画出大致图象，能直观地反映出函数的变化趋势，帮助学生快速找到解题的突破口。结合二次函数图象的开口方向、对称轴，分析增减性、最值等性质。降低了思维难度，提高了解题效率。

3. **条件挖掘是关键：**题设中的每一个条件都有其存在的意义，无论是参数的限制条件(如a、b为不相等的实数)，还是函数的定点坐标，都可能成为化简等式、求解参数的重要依据。例如在存在性问题中，参数的限制条件往往是消去无关参数、得出常数的关键。只有充分挖掘题设条件，才能确保解题过程的严谨性和正确性。关注题设中的限制条件，作为等式化简的依据。

在数学学习中，知识链通常是“从数到代数式，再到方程、不等式，最后到函数”，是从具体到抽象、从静态到动态的过程，代数式是函数的基础，函数本质上由代数式表示，二者密不可分。